

Programme de colle n°5

semaine du 12 au 16 octobre

Notions vues en cours

Chapitre 6 – Rappels et compléments sur les fonctions réelles (suite)

- Définition intuitive de limite (la véritable définition sera vue ultérieurement), limite à gauche et à droite, cas d'une limite infinie, notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ avec $a \in I$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, cas où une limite n'existe pas
- *On ne demandera pas de justifier une limite "simple" faisant intervenir une fonction usuelle. Les opérations sur les limites (y compris la composition) sont utilisables.*
- Continuité ponctuelle, continuité globale : f est continue sur A si elle est continue en chaque point de A
- La continuité est préservée par somme, produit, multiplication par une constante, quotient, composée ; les fonctions polynômiales, rationnelles, et toutes les fonctions usuelles sont continues là où elles sont définies, sauf $x \mapsto \lfloor x \rfloor$
- Dérivabilité ponctuelle d'une fonction, nombre dérivé de f en a , taux d'accroissement de f en a
- Technique : déterminer une limite en la reformulant comme un taux d'accroissement
- Dérivabilité globale : f est dérivable sur A si elle est dérivable en chaque point de A , ensemble de dérivabilité de f , fonction dérivée f'
- La dérivabilité est préservée par somme, produit, multiplication par une constante, quotient, composée ; les fonctions polynômiales et rationnelles sont dérivables là où elles sont définies, dérivation des fonctions usuelles (un formulaire est disponible en ligne)
- Dérivées de $\lambda u + \mu v$, de uv , de $\frac{1}{u}$, de $\frac{u}{v}$, de u^n avec $n \in \mathbb{Z}$, de $v \circ u$ (un formulaire est disponible en ligne)
- La dérivabilité ponctuelle (resp. globale) entraîne la continuité ponctuelle (resp. globale)
- Distinction entre " f dérivable sur A " et " $f|_A$ est dérivable" (idem pour continuité)
- Tangente en un point : équation, représentation graphique
- $f' \geq 0$ sur un intervalle I ssi f est croissante sur I (adaptation au cas $f' \leq 0$, $f' \equiv 0$) ; Si $f' > 0$ sur I , alors f est strictement croissante sur I
- Étude d'une fonction avec tracé
- Asymptote horizontale, verticale
- Étant donné $f : I \rightarrow \mathbb{C}$: définitions des fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, dérivation d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$, mêmes formules de dérivation que pour les fonctions de $\mathbb{R}^I$
- Dédution, à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$, des courbes des fonctions $x \mapsto f(x) + k$, de $x \mapsto f(x - a)$, de $x \mapsto Af(x)$ ou encore de $x \mapsto f(\omega x)$

Chapitre 7 – Fonctions usuelles

On introduit ici la notion de fonction réciproque et de fonction bijective uniquement dans le cas de fonctions réelles de la variable réelle. Ces notions seront revues plus tard dans le chapitre Applications. Les autres notions (**injectivité, surjectivité, ensemble $f^{-1}(B)$, etc.**) ne sont **pas au programme**. Les écritures paramétriques d'ensemble sont hors programme.

- Ensemble $f(I) = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in I \ y = f(x)\}$, c'est l'ensemble des valeurs prises par f sur I
- Pour $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, définition de f réalise une bijection de I sur J
- Corollaire du TVI : si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$
- Une fonction $f : I \rightarrow J$ est bijective si f réalise une bijection de I sur J , définition de $f^{-1} : J \rightarrow I$, relation $f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$ pour tous $x \in I$ et $y \in J$
- Fonction id_A , relations $f \circ f^{-1} = \text{id}_J$ et $f^{-1} \circ f = \text{id}_I$
- Théorème de la bijection monotone, dérivabilité ponctuelle et globale de f^{-1} avec la formule de dérivation
- Représentation graphique de la courbe de f^{-1} en fonction de celle de f
- Fonctions usuelles et leurs propriétés : logarithmes ($\ln$ et $\log_a$), exponentielles (e^x , a^x avec $a > 0$), puissances ($x \mapsto x^\alpha$ avec α dans $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$, $\mathbb{R}$), croissances comparées (démonstration non exigible)
- Fonctions trigonométriques : $\cos$, $\sin$, $\tan$, $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$, ch , sh , th . Pour chaque fonction : définition, valeurs remarquables, éventuelles parité / périodicité / limites en $\pm\infty$, sens de variation, ensemble de dérivabilité, dérivée et représentation graphique
- Formules pour $\sin(\arcsin x)$, $\arcsin(\sin x)$, $\cos(\arcsin x)$, formules équivalentes avec $\arccos$, formules $\tan(\arctan x)$, $\arctan(\tan x)$
- Dérivation de $t \mapsto e^{\varphi(t)}$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable

Les exercices porteront majoritairement sur du calcul de dérivée et sur le Chapitre 9.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examineur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles de la page suivante (chapitres 4 à 6).

Les questions flash sont en page suivante

Questions de Cours.

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

- Q1** On pose $f : x \mapsto \ln(2-x)\sqrt{1-x^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de f , les points f en lesquels est dérivable et calculer la dérivée de f .
Chapitre 6, Exercice 6.31

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

- Q2**
- Préciser l'ensemble de définition D_f de la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ dans les cas $\alpha = 2$, $\alpha = -2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{1}{3}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - Énoncer sans démonstration le théorème des croissances comparées.
Chapitre 7, Théorème 7.23
 - Calculer la limite de $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$ quand x tend vers $+\infty$.
Chapitre 7, Exercice 7.24

[Exporter
\(LaTeX\)](#)

- Q3** Ensembles de départ, d'arrivée, de dérivabilité, expression de la dérivée et *représentation graphique* de trois fonctions :
- Une fonction parmi $\cos$, $\sin$, $\tan$. Pour tangente, deux expressions de la dérivée sont attendues.
 - Une fonction parmi $\arccos$, $\arcsin$, $\arctan$. Pour la fonction $\arccos$ (et idem pour $\arcsin$ et $\arctan$), on précisera pour quelles valeurs de x les identités $\arccos(\cos x) = x$ et $\cos(\arccos x) = x$ sont valides.
 - Une fonction parmi ch , sh , th . Pour th , deux expressions de la dérivée sont attendues. On devra également donner la définition de l'expression de $\text{ch}x$, $\text{sh}x$, $\text{th}x$.

Chapitre 6 – Rappels et compléments sur les fonctions réelles

- Soit f et g deux fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Que signifie $f \leq g$?
- Soit f et g deux fonctions dont on note D_f et D_g les ensembles de définitions. Que doit vérifier un réel x pour que $(g \circ f)(x)$ ait un sens ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est croissante”. Oralement : et pour “ f est strictement croissante” ?
- Si f est croissante et g est décroissante, quelle est la monotonie de $g \circ f$? Et si f et g sont toutes deux décroissantes ?
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est majorée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner une caractérisation en termes de quantificateurs de “ f est bornée”
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f admet un minimum en a ”
- Donner la définition de “ f est continue en a ”
- Donner la définition de “ f est dérivable en a ”
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l’examineur)

Chapitre 5 – Nombres complexes

- Soit z et z' deux complexes et λ un réel. Parmi les formules suivantes, compléter celles qui sont vraies (et seulement celles-là) :

$$\operatorname{Re}(z + z') = \dots \quad \operatorname{Im}(zz') = \dots \quad \operatorname{Re}(\lambda z) = \dots \quad \operatorname{Im}(\bar{z}) = \dots$$

- Compléter les formules suivantes : $z + \bar{z} = \dots$ et $z - \bar{z} = \dots$
- Compléter l’identité remarquable suivante : $|u + v|^2 = \dots$
- À quelle condition sur u et v a-t-on $|u + v| = |u| + |v|$?
- Donner les deux formules d’Euler.
- À quelle condition est-ce qu’un complexe z admet une forme trigonométrique ? Donner cette forme en précisant dans quels ensembles appartiennent chaque nouvelle variable.
- Mettre sous forme trigonométrique un complexe de la forme a et/ou de la forme ib avec a et b deux réels choisis par l’examineur.
- Si $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ (avec $r, r' \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$), que peut-on en déduire sur r, r', θ, θ' ?
- Combien de racines carrées possède un nombre complexe ω ? Si z est une de ces racines, que peut-on dire ?
- On considère le polynôme $az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. Que vaut la somme de ses racines ? et le produit ?
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelles sont les racines n -ièmes de l’unité ?
- Soit $z \in \mathbb{C}$. Écrire e^z sous forme trigonométrique.
- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. À quelle condition sur $\arg(z)$ a-t-on $z \in \mathbb{R}_+^*$? et $z \in \mathbb{R}^*$?

Chapitre 4 – Trigonométrie

- Pour cosinus, sinus ou tangente : une ou deux formules à compléter parmi les formules de changement de quadrans, d’addition, de duplication, au choix de l’examineur.
- Compléter : $\cos a = \cos b \iff \dots$
- Compléter : $\sin a = \sin b \iff \dots$
- Compléter : $\tan a = \tan b \iff \dots$
- Quel est l’ensemble de définition de la fonction tangente ?

Annexe : code LaTeX des exercices à copier-coller

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

On pose $f: x \mapsto \ln(2-x)\sqrt{1-x^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de f , les points f en lesquels est dérivable et calculer la dérivée de f .

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

```
\begin{itemize}
\item Préciser l'ensemble de définition  $D_f$  de la fonction  $f: x \mapsto x^{\alpha}$  dans les cas  $\alpha = 2$ ,  $\alpha = -2$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
\item Énoncer sans démonstration le théorème des croissances comparées.
\item Calculer la limite de  $\frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .
\end{itemize}
```

[Retour en
arrière](#)

Contenu reproduit (merci de me le signaler s'il y a un bug !)

Ensembles de départ, d'arrivée, de dérivabilité, expression de la dérivée et **représentation graphique** de trois fonctions :

```
\begin{itemize}
\item Une fonction parmi  $\cos$ ,  $\sin$ ,  $\tan$ . Pour tangente, deux expressions de la dérivée sont attendues.
\item Une fonction parmi  $\arccos$ ,  $\arcsin$ ,  $\arctan$ . Pour la fonction  $\arccos$  (et idem pour  $\arcsin$  et  $\arctan$ ), on précisera pour quelles valeurs de  $x$  les identités  $\arccos(\cos x) = x$  et  $\cos(\arccos x) = x$  sont valides.
\item Une fonction parmi  $\operatorname{ch}$ ,  $\operatorname{sh}$ ,  $\operatorname{th}$ . Pour  $\operatorname{th}$ , deux expressions de la dérivée sont attendues. On devra également donner la définition de l'expression de  $\operatorname{ch}x$ ,  $\operatorname{sh}x$ ,  $\operatorname{th}x$ .
\end{itemize}
```